UNION DES COMORES | OFFICE NATIONAL DES EXAMENS ET CONCOURS

Épreuve de: *Mathématiques*

Durée: **4 H** | Coef: **5**

Série: **C** | Nombre de pages: **2**

SESSION 2007 — **BACCALAUREAT**

Exercice 1 : (5 points)

A] Une urne contient 9 boules rouges et 11 boules noires indiscernables au toucher.
On tire trois boules de la façon suivante : Une première boule est tirée et remise, puis deux boules sont tirées simultanément.
En supposant l'équiprobabilité des différents tirages, déterminer la probabilité d'obtenir trois boules rouges.

B]

Résoudre dans IN * x IN* le système suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ PGCD(x, y) = 8 \end{cases}$

Exercice 2 : (5 points)

Le plan est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
On désigne par H l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que z ' = - z² + i z + 1.
(d) la droite d'équation x = 1.

1°- Déterminer l'affixe du point O' image du point O (origine du repère) par H.
2°- Démontrer que le point O admet deux antécédents A et B par H dont on déterminera les affixes respectifs z_A et z_B ; avec $R_e(z_A) > 0$
Calculer un argument du nombre complexe z_A et z_B

3°- On pose : z = x + i y et z' = x' + i y' où x, x', y et y' des nombres réels.

Montrer que : $\begin{cases} x' = -x^2 + y^2 - y + 1 \\ y' = x - 2xy \end{cases}$

4°- Soit (E) l'ensemble des points M dont l'image par H appartient à la droite (d).
a) Établir une équation cartésienne de (E)
b) En déduire que (E) est une conique dont on déterminera les éléments géométriques (sommets – excentricité – foyers – directrices – asymptote)

5°- Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

M'' d'affixe z'' = x'' + i y'' ; R (M) = M''
a) Exprimer x'' et y'' en fonction de x et y.
b) Reconnaître alors l'ensemble (F) image de l'ensemble (E) par R.

6°- Tracer (E) et (F).

Problème : (**10 points)**

Les deux parties A et B sont indépendantes

Partie A :
On considère l'application f définie sur $I =]0;\pi[$ *par* $f(x) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

1°- a) Exprimer f '(x) en fonction de $\tan\frac{x}{2}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur I

c) Donner le signe de f(x) suivant les valeurs de x .

d) Résoudre dans l'intervalle I, l'équation $f(x)=\frac{1}{2}\ln 3$

2°- a) Montrer que f admet une application réciproque notée g

b)Montrer que $f(\pi - x)+f(x)=0$

c) En déduire que C_f et C_g admettent chacune un centre de symétrie dont on déterminera leurs coordonnées.

d) Tracer les courbes représentatives de f et de g dans un même repère orthonormé.

3°- Déduire des questions précédentes, l'expression de g'(x) et la valeur de J= $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Partie B :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de terme général $U_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1°- a) Étudier le sens de variation de la suite (U_n)

b) En déduire la convergence de la suite (U_n)

2°- En intégrant par parties, montrer que : $U_n=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}dx$

3°- Montrer $\forall n \succ 0 , U_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ que

(on pourra écrire que : $x^{n+1}=x^n.x+x^n-x^n$)

4°- a) En déduire que : $\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2} \leq U_n \leq \frac{1}{2n}$

b) En déduire la limite de la suite (U_n).

5°- Calculer U_0 et vérifier que pour tout n ≥1, $U_n + U_{n-1} = \frac{1}{n}$

6°- Vérifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-......+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ = ln 2